Simulation

Processus Stochastique et Simulation
Année Universitaire 2010 - 2011

DR. Chokri SLIM

Institut Supérieur de Comptabilité
et d'Administration des Entreprises
Université de la Manouba

7 mars 2011

Sommaire

Définition

- La simulation consiste à construire un modèle d'un système, à conduire des expérimentations sur celui ci et à interpréter les observations dans le but de prendre une décision.
- Elle permet de comprendre le fonctionnement dynamique du système, de comparer des configuration dans le but d'améliorer les performances globales.
- Elle permet également de déterminer la validité d'un modéle qu'il soit logique, numérique, statistique, ...
- La simulation ne permet d'obtenir une solution analytique car elle ne fournit pas de réponse exacte. Elle est utile pour l'étude de systèmes complexes.
- Lorsque dans la simulation intervient un élément aléatoire, on parle de simulation aléatoire.

Définition

- La simulation consiste à construire un modèle d'un système, à conduire des expérimentations sur celui ci et à interpréter les observations dans le but de prendre une décision.
- Elle permet de comprendre le fonctionnement dynamique du système, de comparer des configuration dans le but d'améliorer les performances globales.
- Elle permet également de déterminer la validité d'un modéle qu'il soit logique, numérique, statistique, ...
- La simulation ne permet d'obtenir une solution analytique car elle ne fournit pas de réponse exacte. Elle est utile pour l'étude de systèmes complexes.
- Lorsque dans la simulation intervient un élément aléatoire, on parle de simulation aléatoire.

Définition

- La simulation consiste à construire un modèle d'un système, à conduire des expérimentations sur celui ci et à interpréter les observations dans le but de prendre une décision.
- Elle permet de comprendre le fonctionnement dynamique du système, de comparer des configuration dans le but d'améliorer les performances globales.
- Elle permet également de déterminer la validité d'un modéle qu'il soit logique, numérique, statistique, ...
- La simulation ne permet d'obtenir une solution analytique car elle ne fournit pas de réponse exacte. Elle est utile pour l'étude de systèmes complexes.
- Lorsque dans la simulation intervient un élément aléatoire, on parle de simulation aléatoire.

Définition

- La simulation consiste à construire un modèle d'un système, à conduire des expérimentations sur celui ci et à interpréter les observations dans le but de prendre une décision.
- Elle permet de comprendre le fonctionnement dynamique du système, de comparer des configuration dans le but d'améliorer les performances globales.
- Elle permet également de déterminer la validité d'un modéle qu'il soit logique, numérique, statistique, ...
- La simulation ne permet d'obtenir une solution analytique car elle ne fournit pas de réponse exacte. Elle est utile pour l'étude de systèmes complexes.
- Lorsque dans la simulation intervient un élément aléatoire, on parle de simulation aléatoire.

Définition

- La simulation consiste à construire un modèle d'un système, à conduire des expérimentations sur celui ci et à interpréter les observations dans le but de prendre une décision.
- Elle permet de comprendre le fonctionnement dynamique du système, de comparer des configuration dans le but d'améliorer les performances globales.
- Elle permet également de déterminer la validité d'un modéle qu'il soit logique, numérique, statistique, ...
- La simulation ne permet d'obtenir une solution analytique car elle ne fournit pas de réponse exacte. Elle est utile pour l'étude de systèmes complexes.
- Lorsque dans la simulation intervient un élément aléatoire, on parle de simulation aléatoire.

Domaines d'applications

Les domaines d'applications sont divers et variés. A titre d'exemple nous citerons quelques classes d'applications :

- Gestion de production (équilibrage de lignes d'assemblage, dimensionnement, évaluation de charges prévisionnelles, ...)
- Transports/Logisitque (dimensionnement de flotte de transport, détermination de tournée, traffic routier, ...)
- Gestion d'´equipes/de planning
- SI et telecom (comportement utilisateur, conception et dimensionnement de hubs, ...)
- Et bien d'autres (gestion d'hôpitaux, domaine militaire, nucléaire, météo,
- jeux, ...)

Domaines d'applications

Les domaines d'applications sont divers et variés. A titre d'exemple nous citerons quelques classes d'applications :

- Gestion de production (équilibrage de lignes d'assemblage, dimensionnement, évaluation de charges prévisionnelles, ...)
- Transports/Logisitque (dimensionnement de flotte de transport, détermination de tournée, traffic routier, ...)
- Gestion d' ´equipes/de planning
- SI et telecom (comportement utilisateur, conception et dimensionnement de hubs, ...)
- Et bien d'autres (gestion d'hôpitaux, domaine militaire, nucléaire, météo,
- jeux, ...)

Domaines d'applications

Les domaines d'applications sont divers et variés. A titre d'exemple nous citerons quelques classes d'applications :

- Gestion de production (équilibrage de lignes d'assemblage, dimensionnement, évaluation de charges prévisionnelles, ...)
- Transports/Logisitque (dimensionnement de flotte de transport, détermination de tournée, traffic routier, ...)
- Gestion d'´equipes/de planning
- SI et telecom (comportement utilisateur, conception et dimensionnement de hubs, ...)
- Et bien d'autres (gestion d'hôpitaux, domaine militaire, nucléaire, météo,
- jeux, ...)

Domaines d'applications

Les domaines d'applications sont divers et variés. A titre d'exemple nous citerons quelques classes d'applications :

- Gestion de production (équilibrage de lignes d'assemblage, dimensionnement, évaluation de charges prévisionnelles, ...)
- Transports/Logisitque (dimensionnement de flotte de transport, détermination de tournée, traffic routier, ...)
- Gestion d'´equipes/de planning
- SI et telecom (comportement utilisateur, conception et dimensionnement de hubs, ...)
- Et bien d'autres (gestion d'hôpitaux, domaine militaire, nucléaire, météo,
- jeux, ...)

Domaines d'applications

Les domaines d'applications sont divers et variés. A titre d'exemple nous citerons quelques classes d'applications :

- Gestion de production (équilibrage de lignes d'assemblage, dimensionnement, évaluation de charges prévisionnelles, ...)
- Transports/Logisitque (dimensionnement de flotte de transport, détermination de tournée, traffic routier, ...)
- Gestion d' ´equipes/de planning
- SI et telecom (comportement utilisateur, conception et dimensionnement de hubs, ...)
- Et bien d'autres (gestion d'hôpitaux, domaine militaire, nucléaire, météo,
- jeux, ...)

Domaines d'applications

Les domaines d'applications sont divers et variés. A titre d'exemple nous citerons quelques classes d'applications :

- Gestion de production (équilibrage de lignes d'assemblage, dimensionnement, évaluation de charges prévisionnelles, ...)
- Transports/Logisitque (dimensionnement de flotte de transport, détermination de tournée, traffic routier, ...)
- Gestion d'´equipes/de planning
- SI et telecom (comportement utilisateur, conception et dimensionnement de hubs, ...)
- Et bien d'autres (gestion d'hôpitaux, domaine militaire, nucléaire, météo,
- jeux, ...)

Etapes de la simulation

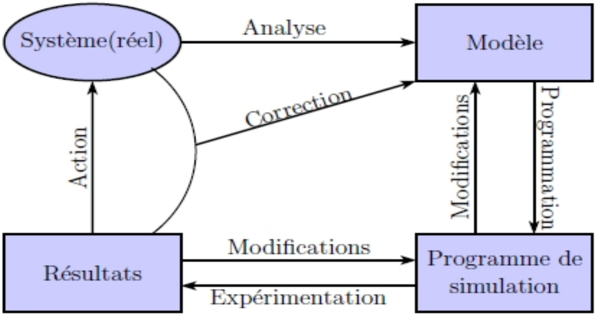

FIG.: Les étapes de la simulation

Sommaire

Origine et définitions

- Les techniques de simulation Monte Carlo sont des méthodes numériques, qui utilisent des tirages aléatoires pour simuler des systèmes déterministes
- Le nom a été proposé par les scientifiques du projet Manhattan lors de la deuxième guerre mondiale et fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monaco
- Parmi les pionniers des méthodes MC nous retrouvons E. Fermi, J. Neumann, S. Ulam, N. Metropolis.
- Les méthodes MC sont aujourd'hui utilisées pour simuler des phénomènes physiques complexes dans plusieurs domaines scientifiques et appliqués : radioactivité, physique des hautes énergies, réseaux, économétrie, logistique.

Origine et définitions

- Les techniques de simulation Monte Carlo sont des méthodes numériques, qui utilisent des tirages aléatoires pour simuler des systèmes déterministes
- Le nom a été proposé par les scientifiques du projet Manhattan lors de la deuxième guerre mondiale et fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monaco
- Parmi les pionniers des méthodes MC nous retrouvons E. Fermi, J. Neumann, S. Ulam, N. Metropolis.
- Les méthodes MC sont aujourd'hui utilisées pour simuler des phénomènes physiques complexes dans plusieurs domaines scientifiques et appliqués : radioactivité, physique des hautes énergies, réseaux, économétrie, logistique.

Origine et définitions

- Les techniques de simulation Monte Carlo sont des méthodes numériques, qui utilisent des tirages aléatoires pour simuler des systèmes déterministes
- Le nom a été proposé par les scientifiques du projet Manhattan lors de la deuxième guerre mondiale et fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monaco
- Parmi les pionniers des méthodes MC nous retrouvons E. Fermi, J. Neumann, S. Ulam, N. Metropolis.
- Les méthodes MC sont aujourd'hui utilisées pour simuler des phénomènes physiques complexes dans plusieurs domaines scientifiques et appliqués : radioactivité, physique des hautes énergies, réseaux, économétrie, logistique.

Origine et définitions

- Les techniques de simulation Monte Carlo sont des méthodes numériques, qui utilisent des tirages aléatoires pour simuler des systèmes déterministes
- Le nom a été proposé par les scientifiques du projet Manhattan lors de la deuxième guerre mondiale et fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monaco
- Parmi les pionniers des méthodes MC nous retrouvons E. Fermi, J. Neumann, S. Ulam, N. Metropolis.
- Les méthodes MC sont aujourd'hui utilisées pour simuler des phénomènes physiques complexes dans plusieurs domaines scientifiques et appliqués : radioactivité, physique des hautes énergies, réseaux, économétrie, logistique.

Origine et définitions

- La technique de simulation Monte Carlo s'appuie sur l'échantillonnage des distributions des quantités incertaines.
- La simulation Monte Carlo peut être utilisée toutes les fois que le comportement d'un système peut être décrit par l'évolution d'une densité de probabilité.
- La méthode est basée sur (i) l'échantillonnage des quantités aléatoires, (ii) de la répétition d'une simulation déterministe (trial) pour chaque quantité échantillonnée et (iii) sur l'agrégation des résultats.
- MC est souvent considérée comme la méthode en dernier ressort puisque elle demande des ressources computationnelles assez consistantes.

Origine et définitions

- La technique de simulation Monte Carlo s'appuie sur l'échantillonnage des distributions des quantités incertaines.
- La simulation Monte Carlo peut être utilisée toutes les fois que le comportement d'un système peut être décrit par l'évolution d'une densité de probabilité.
- La méthode est basée sur (i) l'échantillonnage des quantités aléatoires, (ii) de la répétition d'une simulation déterministe (trial) pour chaque quantité échantillonnée et (iii) sur l'agrégation des résultats.
- MC est souvent considérée comme la méthode en dernier ressort puisque elle demande des ressources computationnelles assez consistantes.

Origine et définitions

- La technique de simulation Monte Carlo s'appuie sur l'échantillonnage des distributions des quantités incertaines.
- La simulation Monte Carlo peut être utilisée toutes les fois que le comportement d'un système peut être décrit par l'évolution d'une densité de probabilité.
- La méthode est basée sur (i) l'échantillonnage des quantités aléatoires, (ii) de la répétition d'une simulation déterministe (trial) pour chaque quantité échantillonnée et (iii) sur l'agrégation des résultats.
- MC est souvent considérée comme la méthode en dernier ressort puisque elle demande des ressources computationnelles assez consistantes.

Origine et définitions

- La technique de simulation Monte Carlo s'appuie sur l'échantillonnage des distributions des quantités incertaines.
- La simulation Monte Carlo peut être utilisée toutes les fois que le comportement d'un système peut être décrit par l'évolution d'une densité de probabilité.
- La méthode est basée sur (i) l'échantillonnage des quantités aléatoires, (ii) de la répétition d'une simulation déterministe (trial) pour chaque quantité échantillonnée et (iii) sur l'agrégation des résultats.
- MC est souvent considérée comme la méthode en dernier ressort puisque elle demande des ressources computationnelles assez consistantes.

Origine et définitions

Ces méthodes peuvent servir pour :

- le calcul d'intégrale,
- la résolution d'équations aux dérivées partielles,
- la résolution de système linéaire,
- la résolution de problèmes d'optimisation (algorithme du recuit simulé)
- simulation des lois de probabilités.

Origine et définitions

Ces méthodes peuvent servir pour :

- le calcul d'intégrale,
- la résolution d'équations aux dérivées partielles,
- la résolution de système linéaire,
- la résolution de problèmes d'optimisation (algorithme du recuit simulé)
- simulation des lois de probabilités.

Origine et définitions

Ces méthodes peuvent servir pour :

- le calcul d'intégrale,
- la résolution d'équations aux dérivées partielles,
- la résolution de système linéaire,
- la résolution de problèmes d'optimisation (algorithme du recuit simulé)
- simulation des lois de probabilités.

Origine et définitions

Ces méthodes peuvent servir pour :

- le calcul d'intégrale,
- la résolution d'équations aux dérivées partielles,
- la résolution de système linéaire,
- la résolution de problèmes d'optimisation (algorithme du recuit simulé)
- simulation des lois de probabilités.

Origine et définitions

Ces méthodes peuvent servir pour :

- le calcul d'intégrale,
- la résolution d'équations aux dérivées partielles,
- la résolution de système linéaire,
- la résolution de problèmes d'optimisation (algorithme du recuit simulé)
- simulation des lois de probabilités.

Sommaire

Principe

Il s'agit d'approcher :

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

La méthode de Monte-Carlo consiste à écrire cette intégrale sous la forme :

$$I = E[f(U)]$$

où U est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$ et à utiliser la loi des grands nombres : si $(Ui)_{i\varepsilon IN}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0;1]$, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \longrightarrow E[f(U)]$$

Principe

En d'autres termes, si $u_1; u_2; u_3; .. \, u_n$ sont des nombres tirés au hasard dans $[0; 1]$,
$\frac{1}{n}(f(u_1) + f(u_2) + ... + f(u_n))$ est une approximation de $I = \int_0^1 f(x)dx$.

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Principe

Prenons l'exemple plus général d'une intégrale du type :

$$I = \int_{IR^d} g(x)f(x)dx.$$

où $f(x) \geq 0$ et $\int_{IR^d} gf(x)dx. = 1$ Alors$I = E[g(X)]$ oùX est une variable aléatoire de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur IR^d. Toujours par la loi des grands nombres, si $(X_i)_{i \varepsilon IN}$ est une suite de variables indépendantes sur IR^d de loi de densité f : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i) \longrightarrow E[g(X)]$
et donc si $(x_1; x_2; ...; x_n)$ est une réalisation de $(X_1; X_2; ...; X_n)$;

$$I = \int_{IR^d} g(x)f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Principe

Par suite un intervalle de confiance pour $E[g(X_i)]$ au niveau $0;95$ est :

$$[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - \sigma\frac{1,96}{\sqrt{n}}; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) + \sigma\frac{1,96}{\sqrt{n}}]$$

En général σ ne sera pas calculable et on l'approximera par une méthode de Monte-Carlo :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i))^2 \longrightarrow \sigma^2$$

Estimation du nombre Pi par simulation de MC

On sait que π est la la surface d'un disque de rayon 1. On définit $C = \{(x\,;\,y)$ tel que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1\}$, $D = \left\{(x\,;\,y)\right.$ tel que $\left. x^2 + y^2 = 1\right\}$ et $D^+ = D \cap \mathbb{R}^2_+$. On a alors

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = E\left[\sqrt{1 - U^2}\right] = E\left[X\right],$$

où U est une v.a. uniforme $[0\,;\,1]$ et $X = \sqrt{1 - U^2}$. De là, on propose l'estimateur :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\simeq \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \\ \pi &\simeq 4.\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{1 - u_i^2}}{n} \end{aligned}$$

où les X_i, pour $i = 1, \ldots, n$, sont n réplications indépendantes de X.

Calcul d'intégral double

$$\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 y \log\left(1 + x^2\right) dx \right) dy = 4E\left[V \log\left(1 + U^2\right) \right],$$

où U et V sont 2 uniformes indépendantes l'une sur $[-1, 1]$ et l'autre sur $[0, 2]$.
Simulez $U = -1 +$ 2×uniforme $[0, 1]$ et $V = 2\times$uniforme $[0, 1]$, pour $n = 1, \ldots, n$, calculez $X_n = 4.V \log\left(1 + U^2\right)$ et puis

$$\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 y \log\left(1 + x^2\right) dx \right) dy \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n.$$

où les X_i, pour $i = 1, \ldots, n$, sont n réplications indépendantes de X.

Sommaire

Méthode de la fonction inverse

On veut simuler une variable aléatoire continues X de fonction de répartition F

théorème

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F strictement croissante, on a :

$$F(x) \rightsquigarrow \mathcal{U}(0,1)$$

Démonstration

On pose :

$$u = F(x) \Longleftrightarrow x = F^{-1}(u)$$

par définition on a $F(x) = P(X \leq x)$ et donc :

$$F^{-1}(F(u)) = P(X \leq F^{-1}(u))$$

or $F^{-1}(F(u)) = u$ par définition de la réciproque et $P(X \leq F^{-1}(u)) = P(F(X) \leq u)$ car F est strictement croissante.
On a donc :

$$u = P(F(X) \leq u)$$

et on reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme.
Si on connaît la fonction F^{-1}, réciproque de F, il suffit de tirer $X = F^{-1}(U)$.

Méthode de la fonction inverse

Exemple : Loi exponentielle

$X \rightsquigarrow Exp(\lambda) \Longleftrightarrow u = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Longleftrightarrow x = F^{-1}(u) = -\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda}$

On pourrait donc poser $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$, mais on peut remarquer que si U suit une loi uniforme sur (0,1) $1-U$ également. On pose donc :

$$X = -\frac{\ln(U)}{\lambda}$$

Méthode de Box-Müller

Théorème

Soit (X, Y), un couple de variables aléatoires de $\mathbb{R}^2$. alors (X, Y) suit la loi normale $N(0, I_2)$ si et seulement si $X = r\cos\theta$ et $Y = r\sin\theta$ où r et θ sont deux variables aléatoires indépendantes avec r^2 suit une loi exponentielle $Exp(1/2)$ et θ une loi uniforme $\mathcal{U}(0, 2\pi)$:

Il découle du théorème que, si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$, alors $X = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V)$ sont indépendantes et de loi normale $N(0, 1)$.

Remarque : Pour simuler $Z \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$, on simule $X \rightsquigarrow N(0, 1)$ et on effectue la transformation : $Z = \mu + \sigma X$.