# Rappels de Probabilité

## Processus Stochastique et Simulation
## Année Universitaire 2010 - 2011

**DR. Chokri SLIM**

**Institut Supérieur de Comptabilité
et d'Administration des Entreprises
Université de la Manouba**

6 février 2011

# Sommaire

# Définition

Une expérience aléatoire est caractérisée par des résultats incertains.
Le résultat d'une expérience aléatoire peut être représenté par une variable aléatoire (v.a.)

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = x \end{aligned}$$

où $\Omega$ est un ensemble appelé espace des états de la nature.
Une v.a. (avant expérience) sera notée en majuscule et sa réalisation (après expérience) en minuscule.

# Exemple

## Exemple 1

Une expérience consiste à jetter un dé et à noter le nombre obtenu sur sa face postérieure. On peut alors poser :

$$\Omega = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6)\}$$

et définir la v.a :

$$\begin{array}{c} X : \Omega \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6\} \\ i \longmapsto X(i) = i \end{array}$$

# Définitions

- Un événement $A \subseteq \Omega$ est un paquêt d'information possible.
- Une $\sigma-$algèbre $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ est l'ensemble des paquêts possibles d'information. On exige que $\mathcal{F}$ soit stable par opérations booléennes.
- Un processus stochastique, noté $\{X_t,\ t \geq 0\}$ ou $\{X\}$ est une séquence de v.a.
- Une trajectoire d'un processus est une séquence de la forme $\{X_t(\omega),\text{ pour } t \geq 0\}$ avec $\omega \in \Omega$
- Une filtration, notée $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ou $\{\mathcal{F}\}$est une séquence de $\sigma-$algèbres.

# Définitions

- Un événement $A \subseteq \Omega$ est un paquêt d'information possible.
- Une $\sigma-$algèbre $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ est l'ensemble des paquêts possibles d'information. On exige que $\mathcal{F}$ soit stable par opérations booléennes.
- Un processus stochastique, noté $\{X_t,\ t \geq 0\}$ ou $\{X\}$ est une séquence de v.a.
- Une trajectoire d'un processus est une séquence de la forme $\{X_t(\omega)$, pour $t \geq 0\}$ avec $\omega \in \Omega$
- Une filtration, notée $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ou $\{\mathcal{F}\}$est une séquence de $\sigma-$algèbres.

# Définitions

- Un événement $A \subseteq \Omega$ est un paquêt d'information possible.
- Une $\sigma-$algèbre $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ est l'ensemble des paquêts possibles d'information. On exige que $\mathcal{F}$ soit stable par opérations booléennes.
- Un processus stochastique, noté $\{X_t,\ t \geq 0\}$ ou $\{X\}$ est une séquence de v.a.
- Une trajectoire d'un processus est une séquence de la forme $\{X_t(\omega),$ pour $t \geq 0\}$ avec $\omega \in \Omega$
- Une filtration, notée $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ou $\{\mathcal{F}\}$est une séquence de $\sigma-$algèbres.

# Définitions

- Un événement $A \subseteq \Omega$ est un paquêt d'information possible.
- Une $\sigma-$algèbre $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ est l'ensemble des paquêts possibles d'information. On exige que $\mathcal{F}$ soit stable par opérations booléennes.
- Un processus stochastique, noté $\{X_t,\ t \geq 0\}$ ou $\{X\}$ est une séquence de v.a.
- Une trajectoire d'un processus est une séquence de la forme $\{X_t(\omega)$, pour $t \geq 0\}$ avec $\omega \epsilon \Omega$
- Une filtration, notée $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ou $\{\mathcal{F}\}$est une séquence de $\sigma-$algèbres.

# Définitions

- Un événement $A \subseteq \Omega$ est un paquêt d'information possible.
- Une $\sigma-$algèbre $\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ est l'ensemble des paquêts possibles d'information. On exige que $\mathcal{F}$ soit stable par opérations booléennes.
- Un processus stochastique, noté $\{X_t,\ t \geq 0\}$ ou $\{X\}$ est une séquence de v.a.
- Une trajectoire d'un processus est une séquence de la forme $\{X_t(\omega)$, pour $t \geq 0\}$ avec $\omega \,\epsilon\, \Omega$
- Une filtration, notée $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ou $\{\mathcal{F}\}$est une séquence de $\sigma-$algèbres.

# Exemples

1. L'événement $A = \{(2), (4), (6)\}$ veut dire que la face qui apparait est paire.
2. $\Omega$ : événement certain et $\varnothing$ : événement impossible
3. $\mathcal{F} = P(\Omega)$

# Exemples

1. L'événement $A = \{(2), (4), (6)\}$ veut dire que la face qui apparait est paire.
2. $\Omega$ : événement certain et $\varnothing$ : événement impossible
3. $\mathcal{F} = P(\Omega)$

# Exemples

1. L'événement $A = \{(2), (4), (6)\}$ veut dire que la face qui apparait est paire.
2. $\Omega$ : événement certain et $\varnothing$ : événement impossible
3. $\mathcal{F} = P(\Omega)$

# Définitions

- Une probabilité est un instrument de mesure des $\pm$ fortes chances de réalisation des événements. Formellement, une probabilité est une application : $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0 \;\; 1]$

avec quelques axiomes de bon sens :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit un espace de probabilité.
- Soit A un événement possible, i.e., $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(A)}$
- L'indépendance de A et B est définie par : $P(B/A) = P(B)$ ou encore $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

# Définitions

- Une probabilité est un instrument de mesure des $\pm$ fortes chances de réalisation des événements. Formellement, une probabilité est une application : $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0 \;\; 1]$

avec quelques axiomes de bon sens :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit un espace de probabilité.
- Soit A un événement possible, i.e., $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(A)}$
- L'indépendance de A et B est définie par : $P(B/A) = P(B)$ ou encore $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

# Définitions

- Une probabilité est un instrument de mesure des $\pm$ fortes chances de réalisation des événements. Formellement, une probabilité est une application : $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0 \;\; 1]$

avec quelques axiomes de bon sens :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit un espace de probabilité.
- Soit A un événement possible, i.e., $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(A)}$
- L'indépendance de A et B est définie par : $P(B/A) = P(B)$ ou encore $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

# Définitions

- Une probabilité est un instrument de mesure des $\pm$ fortes chances de réalisation des événements. Formellement, une probabilité est une application : $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0 \quad 1]$

avec quelques axiomes de bon sens :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit un espace de probabilité.
- Soit A un événement possible, i.e., $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(A)}$
- L'indépendance de A et B est définie par : $P(B/A) = P(B)$ ou encore $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

# Définitions

- Une probabilité est un instrument de mesure des $\pm$ fortes chances de réalisation des événements. Formellement, une probabilité est une application : $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0 \ \ 1]$

avec quelques axiomes de bon sens :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit un espace de probabilité.
- Soit A un événement possible, i.e., $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(A)}$
- L'indépendance de A et B est définie par : $P(B/A) = P(B)$ ou encore $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

# Définitions

- Une probabilité est un instrument de mesure des $\pm$ fortes chances de réalisation des événements. Formellement, une probabilité est une application : $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0 \quad 1]$

avec quelques axiomes de bon sens :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit un espace de probabilité.
- Soit A un événement possible, i.e., $P(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B}{P(A)}$
- L'indépendance de A et B est définie par : $P(B/A) = P(B)$ ou encore $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

# Propriétés

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A/B) = 0$
6. Si $B \subset A$ alors $P(B/A) \geq P(B)$

# Propriétés

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A/B) = 0$
6. Si $B \subset A$ alors $P(B/A) \geq P(B)$

# Propriétés

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A/B) = 0$
6. Si $B \subset A$ alors $P(B/A) \geq P(B)$

# Propriétés

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A/B) = 0$
6. Si $B \subset A$ alors $P(B/A) \geq P(B)$

# Propriétés

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A/B) = 0$
6. Si $B \subset A$ alors $P(B/A) \geq P(B)$

# Propriétés

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A/B) = 0$
6. Si $B \subset A$ alors $P(B/A) \geq P(B)$

# Sommaire

# Loi de Bernoulli

Soit une expéreince aléatoire simple au terme de laquelle deux résultats seulement sont possibles et mutullement exclusifs. Soit un succes soit un echec. Soit $X$ la variable aléatoire associée à cette expériance, $X$ prend la valeur 1 lorsque le résultat est un succés et 0 losque le résultat est un échec. Soit $1-p$ la probabilité d'obtenir un échec et $p$ celle d'un succés. La variable aléatoire $X$ est dite variable de Bernoulli.

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1.$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xp^x(1-p)^{1-x} = p$$

$$V(X) = p(1-p)$$

# Loi Binômiale

Soit une suite $X_i$ $(i = 1, ..., n)$ de n variables de Bernoulli indépendantes. Soit $X$ la variable aléatoire liée au nombre de "succéss" acquis au terme de ces n épreuves. La loi suivie par $X$ verifie trois conditions qui caractérisent la loi Binômiale :

- Le nombre de n épreuves est fixé est connu. Les n épreuves sont inépendantes.
- A chaque épreuve il existe une alternatives qui donne issu à deux résultats mutuellement exclusifs l'un est un succéss l'autre est un échec.
- La probabilité $p$ d'obtention d'un succés dans les différentes épreuves est constante. La loi de $X$ est : $P(X = x) = C_n^x$ $p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, 2, ...n$

avec $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

# Loi de Poisson

Une variable aléatoire discréte $X$ suit une loi de poisson vérifie les propriétés suivantes :

- A la suite d'une épreuve un nombre variable de résultats est réalisé que représente la variable aléatoire $X$.
- La probabilité d'obtention d'une valeur $x$ décroît très rapidement quand $x$ augmente.

La loi de probabilité de la variable $X$ de poisson est :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

avec $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

# Loi uniforme continue

Une variable aléatoire $X$, continue, suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \,\epsilon [a, b] \\ o & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

avec $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

# Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ lorsque sa densité est :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ o & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

On peut déduire directement la fonction de répartition de la loi exponentielle :

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ o & \text{ailleurs} \end{array} \right\}$$

$$E(X) = \frac{1}{\theta} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

# Loi normale standard (ou centrée réduite)

Une variable aléatoire continue $Z$ est dite normale centrée réduite, c'est-à-dire de moyenne 0 et de variance 1, si sa loi de probabilité est donnée par :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad \forall\ z \in \mathbb{R}$$

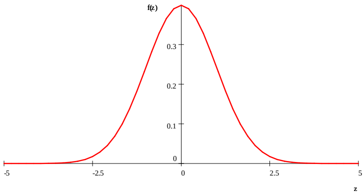


FIG.: Courbe de la loi normale centrée réduite.

# Loi normale

On dit qu'une variable aléatoire continue X est normale de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

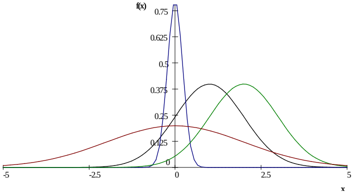


FIG.: courbes de la loi normale pour différentes valeurs de $\mu$ et $\sigma$.

# Loi des grands nombres

Elle exprime le fait que : Si l'on répète un grand nombre de fois une même expérience aléatoire, qui a comme résultat une valeur numérique, alors la moyenne des résultats obtenus tend à se rapprocher de l'espérance mathématique de l'expérience.

**Théorème**

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire simple $i.i.d$, chaque $X_i$ ayant une espérance $E(X_i) = \mu$ et un ´ecart-type $\sigma$. Soit la moyenne échantillonale $\bar{X}_n$ :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors $\overline{X}_n$ tend vers le nombre $E(X_i) = \mu$ en probabilité.

# Théorème centrale limite

Le théorème central limite est l'un des résultats les plus importants de la théorie des probabilités. Ce théorème a d'abord été observé par Gauss qui l'appelait loi des erreurs ; La preuve du théorème a été apportée part Moivre et Laplace.

**Théorème**

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire simple $i.i.d$, chaque $X_i$ ayant une espérance $\mu$ et un ´ecart-type $\sigma$. Soit la moyenne échantillonale $\bar{X}_n$ : $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

*Alors,* $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$ *converge en loi vers la loi normale centrée réduite :* $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{\text{L}} N(0,1)$

# Exemple

Dans cet exemple, nous donnons, dans un tableau, les approximations usuelles des lois de probabilités.

## Exemple

| Lois de probabilité | Approximations possibles |
|---|---|
| Binomiale : $X \rightsquigarrow B(n,p)$ | Poisson : $P(np)$, $n > 30$ *et* $p < 0.1$<br>Normale : $N(np, npq)$, $np > 5$ et $npq > 5$ |
| Poisson : $X \rightsquigarrow B(\lambda)$ | Normale $N(\lambda, \lambda)$, $\lambda > 5$ |
| Student : $X \rightsquigarrow \mathfrak{T}(\mathfrak{n})$ | Normale :$N(0,1)$, $n > 30$ |
| Khi-deux : $X \rightsquigarrow \chi^2(n)$ | $\sqrt{2X} - \sqrt{2n-1} \xrightarrow{L} N(0,1)$, $n > 30$ |

# Proposition

## Proposition

Pour tout seuil de confiance $1-\alpha \in [0\,;\,1]$, on peut construire un intervalle de confiance pour $\mu$, basée sur $\overline{X}_n$ et $\sigma$, comme suit :

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.